例①　$.\dfrac{2}{4\times 7}+\dfrac{2}{7\times 10}+\dfrac{2}{10\times 13}+\cdots+\dfrac{2}{97\times 100}$　を計算しなさい。

キセル算と呼ばれる計算問題です。一般的には、2つの分数の差を求めるときに通分して求めた答えを利用して、式の変形を行います。

例えば、$\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1}{1\times 2}=\dfrac{1}{1\times 2}$　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3-2}{2\times 3}=\dfrac{1}{2\times 3}$　…　を利用すると、

$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\dfrac{1}{5\times 6}$　の計算式は、

$\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$　と置き換えることができます。

すると、間の計算が相殺されてなくなるので、$\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{6}$　となり、この計算式の答えは、$\dfrac{5}{6}$です。

ところが、例①の問題は、このように等しくなりませんので、あとで調整が必要になります。

一見簡便そうに見えたこの手法が、実はそうでもなかったということになりがちです。

ここでは、どうしてそうなるのかという証明は割愛しますが、抜け道となる計算式を作ることができます。

あ＋△＝い　い＋△＝う　う＋△＝え　ゆ＋△＝よ　と分母の差が等しくなっているときに

$\dfrac{●}{あ\times い}+\dfrac{●}{い\times う}+\dfrac{●}{う\times え}+\cdots+\dfrac{●}{ゆ\times よ}$　の計算式は　$\dfrac{分子●の和}{あ\times よ}$　となります。

前出の　$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\dfrac{1}{5\times 6}$　であれば、$\dfrac{1\times 5}{1\times 6}=\dfrac{5}{6}$　となります。

例①　の　$\dfrac{2}{4\times 7}+\dfrac{2}{7\times 10}+\dfrac{2}{10\times 13}+\cdots+\dfrac{2}{97\times 100}$　をこの式に当てはめてみます。

まず分母に着目すると、4から97までの公差3の等差数列の個数は、97＝3×32＋1より、32個であることがわかります。つまり分子の和は、2×32＝64　になります。

計算式を作ってみると　$\dfrac{2\times 32}{4\times 100}=\dfrac{4}{25}$　と一瞬で答えを出すことができました。